第6講　数列

1　［1］　等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ があって，$c_n=a_n+b_n$（$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）とおくとき $c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=17$ である．数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を n の式で表せ．ただし，$\{b_n\}$ の初項，公比はともに整数で，公比は0でないとする．

［2］　数列 a_1，a_2，a_3，…… を次のように定める．

$$a_1=1,\ a_2=a_3=2,\ a_4=a_5=a_6=3,\ \cdots\cdots$$

(1)　与えられた自然数 n に対して，$a_i=n$ となるような i の範囲を求めよ．

(2)　m を自然数とするとき，この数列の初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 正の整数 n に対して，$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ が成り立つように整数 x_n, y_n を定める．

(1) x_{n+1}，y_{n+1} を x_n，y_n で表せ．

(2) n が偶数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=1$，n が奇数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=-1$ であることを証明せよ．

(3) 任意の n に対して $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ に近い近似値であることを証明せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　[1]　(1)　2以上の整数 n に対し $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$ を求めよ.

(2)　任意の正の整数 n に対し $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$ が成り立つことを示せ.

[2]　数列 a_1, a_2, a_3, …… が $a_1=a_2=1$, $a_{r+2}=a_{r+1}+a_r$ ($r=1$, 2, 3, ……) を満たすとき, a_{4n} ($n=1$, 2, 3, ……) は3の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1　［1］　等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ があって，$c_n=a_n+b_n$（$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）とおくとき $c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=17$ である．数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を n の式で表せ．ただし，$\{b_n\}$ の初項，公比はともに整数で，公比は0でないとする．

数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とし，数列 $\{b_n\}$ の初項を a'，公比を r とすると

$a_n=a+(n-1)d$，$b_n=a'r^{n-1}$，$c_n=a_n+b_n=a+(n-1)d+a'r^{n-1}$

$c_1=2$　より　$a+a'=2$　……①　　$c_2=5$　より　$a+d+a'r=5$　……②

$c_3=17$　より　$a+2d+a'r^2=17$　……③

①より $a=2-a'$　これを②に代入して　$d+(r-1)a'=3$　……②'

③−②より　$d+(r-1)ra'=12$　……③'

②'，③'より　$(r-1)a'-3=(r-1)ra'-12$　　$(r-1)^2a'=9=3^2$

a'，r は整数より　$(a', r-1)=(1, \pm3), (9, \pm1)$

$r\neq0$ より　$(a', r)=(1, 4), (1, -2), (9, 2)$

このときそれぞれ　$(a, d)=(1, 0), (1, 6), (-7, -6)$

ゆえに　$\boldsymbol{c_n=1+4^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{c_n=6n-5+(-2)^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{c_n=-6n-1+9\cdot2^{n-1}}$

1　［2］　数列 a_1，a_2，a_3，…… を次のように定める．

$a_1=1$，$a_2=a_3=2$，$a_4=a_5=a_6=3$，……

(1)　与えられた自然数 n に対して，$a_i=n$ となるような i の範囲を求めよ．

(2)　m を自然数とするとき，この数列の初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ．

(1)　$a_i=n$ となる項が第 n 群に属するとすると，第 n 群には n 個の項が属する．

よって，第 n 群の末項は数列 $\{a_n\}$ の第 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 項である．

ゆえに　$a_i=n$ となる i の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(n-1)n+1\leqq i\leqq\dfrac{1}{2}n(n+1)}$　である．

(2)　第 n 群に属する項の総和は　$n\times n=n^2$　である．

数列 $\{a_n\}$ の第 $2m^2$ 項が第 n 群に属するとすると　$\dfrac{1}{2}(n-1)n<2m^2\leqq\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$(n-1)n<(2m)^2\leqq n(n+1)$　　これを満たす整数 n は $n=2m$ のみ

よって，第 $2m$ 群に属する．

第 $(2m-1)$ 群の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $\dfrac{1}{2}(2m-1)\cdot2m=(2m^2-m)$ 項であるので，

数列 $\{a_n\}$ の第 $2m^2$ 項は第 $2m$ 群の $2m^2-(2m^2-m)=m$ 番目の項である．

よって求める和は

$$\sum_{k=1}^{2m-1}k^2+2m\times m=\frac{1}{6}(2m-1)\cdot2m\cdot(4m-1)+2m^2=\frac{m}{3}\{(2m-1)(4m-1)+6m\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}m(8m^2+1)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正の整数 n に対して，$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ が成り立つように整数 x_n, y_n を定める．

(1)　x_{n+1}，y_{n+1} を x_n，y_n で表せ．

(2)　n が偶数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=1$，n が奇数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=-1$ であることを証明せよ．

(3)　任意の n に対して $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ に近い近似値であることを証明せよ．

$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ において

$n=1$ のとき　$1+\sqrt{2}=x_1+y_1\sqrt{2}$　　x_1，y_1 は整数すなわち有理数より　$x_1=1$，$y_1=1$

(1)　$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{n+1}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n=(1+\sqrt{2})(x_n+y_n\sqrt{2})$

$=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2}$

x_n，y_n は整数すなわち有理数より　$\boldsymbol{x_{n+1}=x_n+2y_n}$，$\boldsymbol{y_{n+1}=x_n+y_n}$

(2)　$x_{n+1}{}^2-2y_{n+1}{}^2=(x_n+2y_n)^2-2(x_n+y_n)^2=x_n{}^2+4x_ny_n+4y_n{}^2-2(x_n{}^2+2x_ny_n+y_n{}^2)$

$=-x_n{}^2+2y_n{}^2=-(x_n{}^2-2y_n{}^2)$，$x_1{}^2-2y_1{}^2=1-2=-1$

よって，数列 $\{x_n{}^2-2y_n{}^2\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列である．

したがって　$x_n{}^2-2y_n{}^2=-1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n=\begin{cases}1 & (n：偶数)\\ -1 & (n：奇数)\end{cases}$

(3)　$x_n{}^2-2y_n{}^2=(-1)^n$　より　$(x_n+\sqrt{2}y_n)(x_n-\sqrt{2}y_n)=(-1)^n$

つまり　$(1+\sqrt{2})^n(x_n-\sqrt{2}y_n)=(-1)^n$　　$x_n-\sqrt{2}y_n=\left(\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)^n=(1-\sqrt{2})^n$

$y_n>0$ より　$\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^n}{y_n}$　　$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|=\dfrac{|1-\sqrt{2}|^n}{y_n}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n}$

ここで　$y_{n+1}>y_n$，$0<\sqrt{2}-1<1$　より　$\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n}>\dfrac{(\sqrt{2}-1)^{n+1}}{y_{n+1}}=\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$

よって　$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|>\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$　より

任意の n に対して $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ に近い近似値である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ (1) 2以上の整数 n に対し $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$ を求めよ.

(2) 任意の正の整数 n に対し $\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{5}{4}$ が成り立つことを示せ.

(1) $a_n=\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ とおくと

求める和は

$$\sum_{k=2}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)-2}{2n(n+1)}=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}}$$

(2) $a_n=\dfrac{1}{n^3-n}>\dfrac{1}{n^3}$ 　よって　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k>\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}$

ゆえに　$\displaystyle\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}<\sum_{k=2}^{n}a_k+1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}+1=\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<\frac{5}{4}$

よって示された.

3 ［2］ 数列 a_1, a_2, a_3, …… が $a_1=a_2=1$, $a_{r+2}=a_{r+1}+a_r$ ($r=1$, 2, 3, ……) を満たすとき, a_{4n} ($n=1$, 2, 3, ……) は3の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ.

$a_1=a_2=1$, $a_{r+2}=a_{r+1}+a_r$ のとき

「a_{4n} が3の倍数」 ……(※)　を示す.

(Ⅰ) $a_3=a_2+a_1=2$

よって　$a_4=a_3+a_2=3$ より　$n=1$ のとき（※）は成り立つ.

(Ⅱ) $n=k$ のとき（※）が成り立つと仮定すると a_{4k} は3の倍数である.

$$a_{4(k+1)}=a_{4k+4}=a_{4k+3}+a_{4k+2}=(a_{4k+2}+a_{4k+1})+a_{4k+2}$$
$$=(a_{4k+1}+a_{4k})+a_{4k+1}+(a_{4k+1}+a_{4k})=3a_{4k+1}+2a_{4k}$$

$3a_{4k+1}$, a_{4k} は3の倍数より, $a_{4(k+1)}$ も3の倍数　よって

（※）は $n=k+1$ のときも成り立つ.

(Ⅰ)(Ⅱ)より, すべての自然数 n で（※）が成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 等差数列 1，3，5，7，…… を次の(1)または(2)の規則にしたがってそれぞれ初項から順にグループ分けする．それぞれのグループ分けについて，k 番目のグループに含まれる項の和を求めよ．

(1) k 番目のグループに $2k$ 個の項を含める．

(2) k 番目のグループの最初の項が n のとき，k 番目のグループに n 個の項を含める．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n\geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　${a_n}^2-2{b_n}^2$ を求めよ．

(3)　(2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を１つ求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一橋大数学ⅠAⅡB　　第6講　数列　練習問題　解答

1　等差数列 1，3，5，7，…… を次の(1)または(2)の規則にしたがってそれぞれ初項から順にグループ分けする．それぞれのグループ分けについて，k 番目のグループに含まれる項の和を求めよ．

(1)　k 番目のグループに $2k$ 個の項を含める．

(2)　k 番目のグループの最初の項が n のとき，k 番目のグループに n 個の項を含める．

(1)　1，3 | 5，7，9，11 | 13，15，17，19，21，23 | 25，……

k 番目のグループの末項はもとの数列の第 $(2+4+6+\cdots\cdots+2k)=\dfrac{k(2+2k)}{2}=(k^2+k)$ 項

k 番目のグループの初項はもとの数列の第 $\{(k-1)^2+(k-1)+1\}=(k^2-k+1)$ 項

よって k 番目のグループは

初項　$2(k^2-k+1)-1=2k^2-2k+1$　　末項　$2(k^2+k)-1=2k^2+2k-1$

項数 $2k$ の等差数列の和である．

ゆえに，求める和は

$$\frac{2k}{2}\{(2k^2-2k+1)+(2k^2+2k-1)\}=\boldsymbol{4k^3}$$

(2)　1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17，19，21，23，25 | 27，29，……

k 番目のグループの初項および項数を 3^{k-1} と仮定すると

各グループの項は等差数列であることより

$(k+1)$ 番目の初項は　$3^{k-1}+3^{k-1}\cdot 2=3^k$ となり，$k=1$ のときも成り立っているので，この仮定は正しい．

よって k 番目のグループは

初項 3^{k-1}　末項 3^k-2　項数 3^{k-1}　の等差数列の和である．

ゆえに，求める和は

$$\frac{3^{k-1}}{2}(3^{k-1}+3^k-2)=\frac{3^{k-1}}{2}(3^{k-1}+3\cdot 3^{k-1}-2)=\boldsymbol{3^{k-1}(2\cdot 3^{k-1}-1)}$$

> 群数列の基本は講義でもふれたように「各群の末項が元の数列の第何項にあたるか」が鍵である．ただし，必ずしもその解法ばかりとは限らない．(2)のように予想をつけて数学的帰納法で示す誘導は，センター試験でも出題されたことがある．あくまで「予想」にすぎないのできっちりと示すこと．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 自然数 n に対して，a_n と b_n を

$$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1}，b_{n-1} を用いて表せ．

(2) $a_n{}^2-2b_n{}^2$ を求めよ．

(3) (2)を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を1つ求めよ．

$n=1$ のとき　$3+2\sqrt{2}=a_1+b_1\sqrt{2}$　　a_1，b_1 は自然数すなわち有理数より　$a_1=3$，$b_1=2$

(1) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n+b_n\sqrt{2}&=(3+2\sqrt{2})^n=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1}\\&=(3+2\sqrt{2})(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{2})\\&=(3a_{n-1}+4b_{n-1})+(2a_{n-1}+3b_{n-1})\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　$\begin{cases}\boldsymbol{a_n=3a_{n-1}+4b_{n-1}}\\\boldsymbol{b_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}}\end{cases}$

(2) $a_n{}^2-2b_n{}^2=(3a_{n-1}+4b_{n-1})^2-2(2a_{n-1}+3b_{n-1})^2=a_{n-1}{}^2-2b_{n-1}{}^2$

よって　$a_n{}^2-2b_n{}^2=a_1{}^2-2b_1{}^2=\mathbf{1}$

(3) $a_n{}^2-2b_n{}^2=1$　　$(a_n+\sqrt{2}\,b_n)(a_n-\sqrt{2}\,b_n)=1$

$$a_n-\sqrt{2}\,b_n=\frac{1}{a_n+\sqrt{2}\,b_n}$$

よって　$\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{b_n(a_n+\sqrt{2}\,b_n)}$

ここで，$2>1.96$ より　$\sqrt{2}>1.4$

(1)より　$a_2=17$，$b_2=12$

$$b_2(a_2+\sqrt{2}\,b_2)>12(17+1.4\times 12)=405.6$$

よって　$\dfrac{a_2}{b_2}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{405.6}$

$a_3=99$，$b_3=70$

$$b_3(a_3+\sqrt{2}\,b_3)>70(99+1.4\times 70)=13790$$

よって　$\dfrac{a_3}{b_3}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{13790}<\dfrac{1}{10000}$

よって，求める有理数の1つは

$$\frac{a_3}{b_3}=\boldsymbol{\frac{99}{70}}$$

途中までの流れは講義問題と同様である．
(3)は表現こそ異なるが背景は講義問題と同様．
ただし「近似計算」により「下げる」必要がある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。